

УДК 621.382.8

**РАСЧЕТ ПЬЕЗОАКТИУАТОРОВ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ****Ершов В.С., Ивашов Е.Н., Федотов К.Д.**

*ФГАОУ ВПО «Московский институт электроники и математики  
Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики»»,  
Москва, e-mail: eivashov@hse.ru, e-mail: ienmiem@mail.ru*

Даны базовые понятия метода конечных элементов. Выполнен машинный эксперимент с пьезокерамическим актюатором. Проведено сравнение результатов машинного эксперимента с результатами теоретических исследований в данной области.

**Ключевые слова:** Метод конечных элементов, механика твердого деформируемого тела, пьезокерамика, пьезоактюатор, пьезоэффект.

**PIEZO ACTUATORS CALCULATION USING FINITE ELEMENTS METHOD****Ershov V.S., Ivashov E.N., Fedotov C.D.**

*FGAEU HPE "Moscow institute of electronics and mathematics The National research university  
"High school of economics", Moscow, e-mail: eivashov@hse.ru, e-mail: ienmiem@mail.ru*

Base concepts of finite elements method are given. Machine experiment with piezoceramic actuator is made. Machine experiment results are compared with results of theoretical researches in current area.

**Keywords:** finite elements method, mechanics of solids, piezoceramics, piezo actuator, piezo effect.

Метод конечных элементов (далее МКЭ) в связи с интенсивным развитием вычислительной техники в последнее десятилетие стал активно применяться для численных решений задач из различных областей (механика деформируемого твердого тела, термодинамика, электродинамика и т.д.). Ранее широкому распространению МКЭ мешало отсутствие алгоритмов разбиения области на почти равносторонние треугольники. Методы триангуляции Делоне, а так же другие, позволили создать полностью автоматические САПР, использующие МКЭ.

В основе МКЭ лежит идея замены задачи отыскания самой функции на задачу отыскания конечного числа ее приближенных значений в произвольно выбранных узлах. В одномерном случае для решения подобной задачи выбирается разбиение отрезка на некоторое количество узлов, между которыми задаются отрезки кусочно-полиномиальных функций, которые позволяют провести дальнейшую аппроксимацию к искомой функции. При достаточно большом количестве данных отрезков можно говорить о том, что выполнена сколь угодно точная аппроксимация к искомой функции

Приведем несколько общеизвестных математических выражений из МКЭ [1].

Для одного элемента задается функция  $q(x)$ , причем  $-u'' = q(x)$ ,  $u(0) = u(1) = 0$ , функция  $u$  неизвестна.  $u(x)$  можно представить в виде линейной комбинации

$$u_0\varphi_0(x) + u_1\varphi_1(x) + \dots + u_{n+1}\varphi_{n+1}(x).$$

Далее используется метод Галеркина, позволяющий избежать разрывов непрерывности в узлах.

$\int_0^1 (-u' \varphi_j + q \varphi_j) dx = 0$ .  $\varphi_j(x)$  – функции, совпадающие с пробными функциями, участвующими в записи вышеприведенной линейной комбинации. Дальнейшие преобразования приводят к матричным методам счисления и позволяют представить функции-элементы в удобном для вычислительной техники виде.

Применение МКЭ может существенно упростить задачи проектирования пьезоактюаторов, пьезосканеров и устройств наноперемещений зонда, повысить точность выполнения технологических процессов.

При расчете конструкций, содержащих пьезокерамические элементы в различных программах, использующих МКЭ, необходимо хорошо знать механические свойства используемой пьезокерамики, так как пьезокерамика является анизотропным материалом, а также учитывать состояние пьезоактюатора – он может быть электрически свободен и зажат. Во втором случае пьезокерамика приобретает дополнительную жесткость.

Рассмотрим пример машинного эксперимента. Программа может методом конечно-элементного анализа рассчитать напряжения, деформации и перемещения в конструкции из пьезоэлементов, которые возникают при приложении к подводющим электродам напряжения.

Конструкция имеет конфигурацию пьезотрубки, толщина подводющих электрическое напря-

жение электродов условно принимается равной нулю (при создании пьезотрубок толщина подводящих электродов подбирается таким образом, чтобы не оказывала влияние на деформации самой пьезотрубки при подаче напряжения). Высота элемента пьезотрубки 2 мм, всего восемь элементов. Внешний диаметр пьезотрубки 10 мм, внутренний – 4 мм. Материал пьезотрубки – пьезокерамика ЦТС-38.

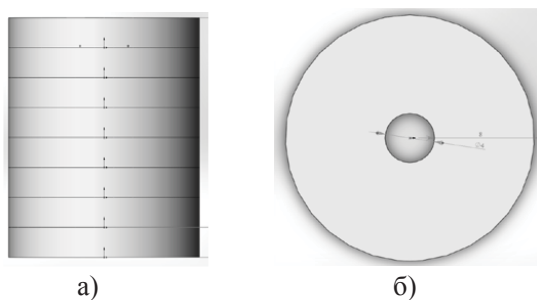


Рис. 1. Вид пьезоактюатора сбоку (а) и сверху (б)

Порядок выполнения машинного эксперимента:

- 1) Создание элемента-кольца с высотой 2 мм, диаметром 10 мм и внутренним диаметром 4 мм.
- 2) Создание сборки из восьми жестко скрепленных торцами пьезоколец;
- 3) Задание материала и справочной геометрии для конструкции;
- 4) Создание исследования на статические нагрузки, создание сетки элементов и закрепление нижнего торца конструкции;

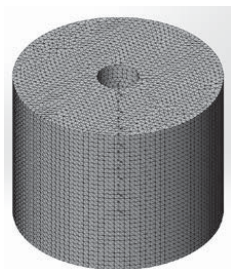


Рис. 2. Сетка конечных элементов на исследуемом объекте

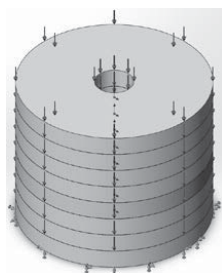
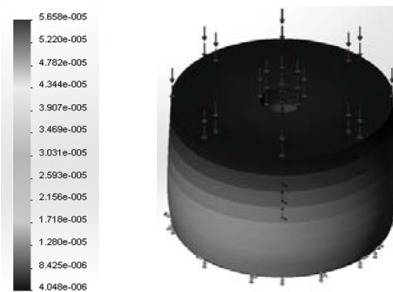


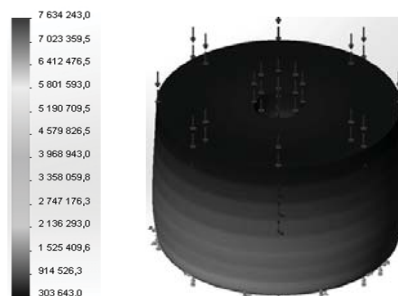
Рис. 3. Схема приложения деформирующей распределенной силы

5) Приложение деформирующей распределенной силы, равной 100 Н к торцу каждого пьезоэлемента;

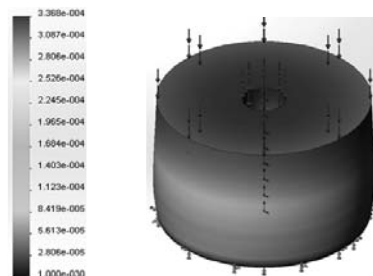
6) Дублирование исследования и реверс направления деформирующих сил;



а)



б)



в)

Рис. 4. Результаты работы программы для случая сжатия пьезоактюатора: деформации (а), напряжения по Мизесу (Па) (б), перемещения (мм) (в)

Как видно из результатов машинного эксперимента, наибольшие деформации и напряжения ( $5,658 \times 10^{-5}$  относительных единиц и 7,634 МПа) возникают в основании (области закрепления образца). Это подтверждается эпюрами аналитических решений задач по прикладной механике.

Наибольший интерес в вопросах исполнения нанотехнологических процессов составляют непосредственно перемещения свободного основания, которые составляют максимально 337 нм. Это перемещение составляет меньше максимально допустимого для пьезоактюатора перемещения в 0,2% длины всего актюатора.

Для того, чтобы проверить точность машинного эксперимента, можно использовать формулу для нахождения абсолютного удлинения одного элемента пьезоактюатора [4].

$$\Delta l = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 E_3 l}{d_{33} Y_z},$$

где  $\varepsilon$  – диэлектрическая проницаемость пьезокерамики,  $\varepsilon_0$  – электрическая постоянная,  $E_3$  – напряженность электрического поля вдоль направления деформации,  $l$  – длина элемента,  $d_{33}$  – пьезомодуль материала вдоль направления деформации,  $Y_z$  – модуль Юнга вдоль направления деформации.

Напряженность электрического поля можно вычислить по формуле

$$E_3 = \frac{P_3 d_{33}}{\varepsilon \varepsilon_0 F},$$

где  $P_3$  – растягивающая/сжимающая сила (в случае эксперимента 100 Н),  $F$  – площадь торцевой грани элемента

$$F = 66 \times 10^{-6} \text{ м}^2. \quad Y_z = 6.8 \times 10^{10} \text{ Н/м}^2.$$

Можно преобразовать формулу абсолютного удлинения.

$$\Delta l = \frac{l P_3}{Y_z F} = \frac{2 * 10^{-3} * 100}{6,8 * 10^{10} * 66 * 10^{-6}} * 8 = 356 \text{ нм},$$

разница между машинным экспериментом и теорией составляет  $356 - 337 = 19$  нм, это абсолютная погрешность.  $(19/356) \times 100\% = 5,4\%$ . Это свидетельствует об адекватности теоретической модели и машинного эксперимента.

В заключение следует отметить, что метод конечных элементов сложнее известного метода конечных разностей. Однако у МКЭ есть ряд преимуществ, проявляющихся на реальных задачах: произвольная форма обрабатываемой области, сетку можно сделать более редкой в тех местах, где особая точность не нужна.

### Список литературы

1. Розин Л.А. Метод конечных элементов. – СПб.: СПбГТУ. – 2000. – С. 126-127.
2. Стренг Г., Фикс Дж. Теория метода конечных элементов. – М.: Мир. 1977. – 349 с.
3. Зинкевич О., Морган К. Конечные элементы и аппроксимация. – М.: Мир. 1986. – 318 с.
4. Федотов К.Д. Взаимосвязь пьезоэлектрических и механических свойств материала. – Материалы НТК студентов, аспирантов и молодых специалистов МИЭМ НИУ ВШЭ. – М.: РИО МИЭМ. – 2013.
5. Феодосьев В.И. Сопrotивление материалов. – М.: Наука. 1967. – 552 с.